**Université Pierre et Marie Curie**



**UE: Statistique et informatique (LI323)**

**Projet 3 - Chaines de Markov   
à Temps Discret (CMTD)**

**Année scolaire : 2013/2014**

**Professeur chargé de TD/TME :**

**Bogdan MIRAUTA**

**Etudiants :**

**Rémi Cadène n°3000693**

**Joël Fieux-Herrera n°3003174**

Sommaire

README ……………………………………………………….…..p2

Exercice 1 .........................……………………………………….…p3

Exercice 2 .........................……………………………………….…p5

Exercice 3 .........................……………………………………….…p7

**Readme**

Ce projet Java sous Eclipse contient quatre dossiers :

- bin contient les fichiers compilés,

- src contient les fichiers sources,

- data contient les fichiers annexes donnés en début de projet et générés par notre programme,

- doc contient le sujet et les réponses aux questions.

Afin de compiler et d'executer, deux possibilités :

- avec Eclipse :

* ouvrir Eclipse
* selectionner votre Workspace
* importer (File / Import...)
* selectionner "General / Existing Projects into Workspace", puis Next
* selectionner en root directory le dossier contenant notre dossier projet (ex: Téléchargements), puis Finish
* compiler et executer (Run)

- avec Terminal :

* Pour compiler :

*cd <directory>/LI323\_P3\_CadeneFieux*

***javac*** *-cp ./src/CMTD/\*.java -d ./bin/CMTD/*

* Pour exécuter :

***java*** *CMTD*

**Exercice 1**

**Question 1**

Résultats vérifiés.

**Question 2**

La méthode des puissances nous rend une estimation du vecteur Pi qui converge vers le résultat obtenu avec la méthode exacte quand n tend vers l'infini.

**Question 3**

Le critère de convergence élémentaire est peu efficace, car il varie fortement en fonction de K, p et q. Plus K et grand, et plus p et q sont petits, plus n doit être grand pour que le résultat rendu par la méthode des puissances corresponde à celui de la méthode exacte.

**Question 4**

- méthode Exacte :

[ 0,0075 0,0153 0,0308 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037 ]

Premier critère : arrêt si la norme vectoriel |Pi(n)| - |Pi(n-1)| < epsilon.

- arrêt : n = 1213

[ 0,0078 0,0158 0,0315 0,0629 0,1262 0,2539 0,5019 ]

Deuxième critère : arrêt si la somme des |pi(n) - pi(n-1)| < epsilon".

- arrêt : n = 1379

[ 0,0076 0,0155 0,0311 0,0626 0,1261 0,2542 0,5029 ]

Troisième critère : arrêt si x% des pi tel que |pi(n) - pi(n-1)| < epsilon", avec pi choisi aléatoirement.

- arrêt : n = 1060 avec x=50%

[ 0,0081 0,0163 0,0321 0,0635 0,1265 0,2534 0,5001 ]

Quatrième critère : arrêt si pour tous les pi, on a |pi(n) - pi(n-1)| < epsilon"

- arrêt : n = 1174

[ 0,0079 0,0159 0,0316 0,0630 0,1263 0,2538 0,5016 ]

Nous avons choisi le quatrième et dernier critère, car il n'est pas aléatoire et il s'arrête à un nombre d'itération inférieur aux deux premiers pour des résultats suffisamment précis.

**Question 5**

Pour K=6, p=0.02, q=0.01, en faisant varier e, avec le critère sélectionné à la dernière question, nous obtenons les résultats suivants :

- méthode Exacte :

[ 0,0075 0,0153 0,0308 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037 ]

- 10-3 : arrêt à n = 62

[ 0,0868 0,1196 0,1352 0,1412 0,1449 0,1580 0,2144 ]

- 10-4 : arrêt à n = 670

[ 0,0113 0,0212 0,0384 0,0696 0,1292 0,2483 0,4820 ]

- 10-5 : arrêt à n = 1174

[ 0,0079 0,0159 0,0316 0,0630 0,1263 0,2538 0,5016 ]

- 10-6 : arrêt à n = 1677

[ 0,0075 0,0153 0,0309 0,0624 0,1260 0,2544 0,5035 ]

- 10-7 : arrêt à n = 2180

[ 0,0075 0,0153 0,0309 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037 ]

Alors le meilleur critère a adopté est "arrêt si pour tous les pi, on a

|pi(n) - pi(n-1)| < epsilon" avec epsilon = 10-5.

**Exercice 2**

**Question 1**

Lors du calcul du vecteur Pi, pour une itération de n, on aura K+1 itérations de j afin de calculer le vecteur Pi.

La méthode de Gauss-Seidel utilise durant l'itération n les valeurs des pi anciennement calculées durant celle-ci, c'est à dire de pi0 à pij-1, tandis que la méthode des puissances utilisent uniquement les valeurs des pi de l'itération n-1.  
Cela explique que la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement.

**Question 2**

Pour K=6, p=0.02, q=0.01, e=10-5, nous obtenons les résultats suivants :

- méthode Exacte :

[ 0,0075 0,0153 0,0308 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037 ]

- méthode des Puissances : arrêt à n = 1379

[ 0,0076 0,0155 0,0311 0,0626 0,1261 0,2542 0,5029 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 27

[ 0,0075 0,0153 0,0309 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037 ]

**Question 3**

Graphe du nombre d'itérations (ordonnées) par rapport au nombre d'états (abscisses)  
pour les méthodes Puissances et Gauss-Seidel.

Nous observons sur cet exemple que la méthode de Gauss-Seidel converge beaucoup plus vite.

**Question 4**

(k,p,q) : (6,0.02,0.01)

- méthode des Puissances : arrêt à n = 1174

[ 0,0079 0,0159 0,0316 0,0630 0,1263 0,2538 0,5016 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 24

[ 0,0075 0,0153 0,0309 0,0623 0,1259 0,2544 0,5037 ]

(k,p,q) : (6,0.9,0.9)

- méthode des Puissances : arrêt à n = 146

[ 0,0192 0,1920 0,1921 0,1923 0,1925 0,1926 0,0193 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 33

[ 0,0192 0,1923 0,1923 0,1923 0,1923 0,1923 0,0192 ]

(k,p,q) : (6,0.9,0.01)

- méthode des Puissances : arrêt à n = 10

[ 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0111 0,9889 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 4

[ 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0111 0,9889 ]

(k,p,q) : (6,0.1,0.9)

- méthode des Puissances : arrêt à n = 16

[ 0,8889 0,1097 0,0014 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 9

[ 0,8889 0,1097 0,0014 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 ]

(k,p,q) : (6,0.0020,0.0010)

- méthode des Puissances : arrêt à n = 6721

[ 0,0118 0,0218 0,0391 0,0702 0,1293 0,2461 0,4817 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt à n = 24

[ 0,0078 0,0157 0,0314 0,0629 0,1260 0,2522 0,5039 ]

**Question 5**

En conclusion de tous ces exemples, la méthode Gauss-Seidel est toujours plus performante que la méthode des Puissances.

**Exercice 3**

**Question 1**

Le graphe associé à la CMTD de l'exercice 3 est représentée par la matrice de transition suivante lorsqu'elle est tronquée à une valeur K :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| départ\arrivé | 0 | 1 | 2 | ... | K-1 | K |
| 0 | 1-p+p\*r | p\*(1-r) | 0 | ... | 0 | 0 |
| 1 | r | (1-p)\*(1-r) | p\*(1-r) | ... | 0 | 0 |
| 2 | r | 0 | (1-p)\*(1-r) | ... | 0 | 0 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| K-1 | r | 0 | 0 | ... | (1-p)\*(1-r) | p\*(1-r) |
| K | r | 0 | 0 | ... | 0 | (1-p)\*(1-r) |

Pour implémenter cette matrice nous utilisons l'algorithme suivant :

Soit m une matrice.  
Soit set(i,j,v) l'opération permettant d'initialiser la ligne i et la colonne j à la valeur v.

m.set(0,0, 1-p+r\*p);

**for** (**int** i=1; i<=k; i++){

m.set(i,0, r );

m.set(i-1,i, p\*(1-r) );

m.set(i,i, (1-p)\*(1-r) );

}

**Question 2**

Pour k=6, p=2/5, r=1/6 et e=10-5, nous obtenons les résultats suivants :

- méthode Exacte :

[ 0,3541 0,2360 0,1574 0,1049 0,0699 0,0466 0,0311 ]

- méthode des Puissances : arrêt n = 18

[ 0,3447 0,2337 0,1585 0,1074 0,0729 0,0494 0,0335 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2

[ 0,3541 0,2360 0,1574 0,1049 0,0699 0,0466 0,0311 ]

**Question 3**

(k,p,q) : (6,2/5,1/6)

- méthode Exacte :

[ 0,3541 0,2360 0,1574 0,1049 0,0699 0,0466 0,0311 ]

- méthode des Puissances : arrêt n = 18

[ 0,3447 0,2337 0,1585 0,1074 0,0729 0,0494 0,0335 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2

[ 0,3541 0,2360 0,1574 0,1049 0,0699 0,0466 0,0311 ]

(k,p,q) : (20,2/5,1/6)

- méthode Exacte :

[ 0,3334 0,2223 0,1482 0,0988 0,0659 0,0439 0,0293 0,0195 0,0130 0,0087 0,0058 0,0039 0,0026 0,0017 0,0011 0,0008 0,0005 0,0003 0,0002 0,0002 0,0001 ]

- méthode des Puissances : arrêt n = 26

[ 0,3334 0,2223 0,1482 0,0988 0,0659 0,0439 0,0293 0,0195 0,0130 0,0087 0,0058 0,0038 0,0026 0,0017 0,0011 0,0007 0,0005 0,0003 0,0002 0,0002 0,0001 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2

[ 0,3334 0,2223 0,1482 0,0988 0,0659 0,0439 0,0293 0,0195 0,0130 0,0087 0,0058 0,0039 0,0026 0,0017 0,0011 0,0008 0,0005 0,0003 0,0002 0,0002 0,0001 ]

(k,p,q) : (6,0.1,0.9)

- méthode Exacte :

[ 0,9890 0,0109 0,0001 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 ]

- méthode des Puissances : arrêt n = 6

[ 0,9890 0,0109 0,0001 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2

[ 0,9890 0,0109 0,0001 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 ]

(k,p,q) : (6,0.9,0.1)

[ 0,1972 0,1755 0,1562 0,1391 0,1238 0,1102 0,0981 ]

- méthode des Puissances : arrêt n = 6

[ 0,1727 0,1617 0,1513 0,1416 0,1325 0,1240 0,1161 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2

[ 0,1972 0,1755 0,1562 0,1391 0,1238 0,1102 0,0981 ]

Plus petite est la chaîne produite par la troncature k, plus grande est la probabilité de chacun des états de i=0 à k.

**Question 4**

Pour K=6, lambda = 1, T=1, r= 1/6, lorsque les arrivées de clients sont poissoniennes, nous obtenons les résultats suivants :

- matrice :  
[ 0,6934 0,3066 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 ]

[ 0,1667 0,5268 0,1533 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 ]

[ 0,1667 0,0000 0,6801 0,0511 0,0000 0,0000 0,0000 ]

[ 0,1667 0,0000 0,0000 0,7822 0,0128 0,0000 0,0000 ]

[ 0,1667 0,0000 0,0000 0,0000 0,8206 0,0026 0,0000 ]

[ 0,1667 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,8308 0,0004 ]

[ 0,1667 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,0000 0,8329 ]

- méthode des Puissances : arrêt n = 72

[ 0,4297 0,3106 0,1856 0,0655 0,0081 0,0003 0,0001 ]

- méthode de Gauss-Seidel : arrêt n = 2

[ 0,4911 0,3181 0,1524 0,0358 0,0025 0,0000 0,0000 ]